Nota técnica 1. Propiedades del índice de la pobreza humana

En esta nota técnica se indican y examinan algunas propiedades importantes del índice de la pobreza humana. Su objeto es ayudar a comprender el índice, y esas propiedades se derivan con respecto a una definición más general del índice de pobreza humana $P(\alpha)$ que el usado efectivamente en este Informe. Esto permite la posibilidad de que las ponderaciones de los tres subíndices de pobreza puedan diferir, de manera que $P(\alpha)$ sea una media ponderada del orden á de P_1, P_2 and P_3.

Así, si $w_i > 0$ es la ponderación de P_i(0), porque $i = 1, 2, 3$, definimos la media generalizada P(á) como

$$(1) \qquad P(\alpha) = \left(\frac{w_1 P_1^\alpha + w_2 P_2^\alpha + w_3 P_3^\alpha}{w_1 + w_2 + w_3} \right)^{1/\alpha}.$$

La media ponderada se reduce a la media ordinaria de orden α cuando $w_i = 1$ para todo i. Con $w_1 - w_2 = w_3 = 1$, tenemos simplemente

$$(2) \qquad P(\alpha) = \left[\left(\frac{1}{3}\right) P_1^\alpha + \left(\frac{1}{3}\right) P_2^\alpha + \left(\frac{1}{3}\right) P_3^\alpha \right]^{1/\alpha}.$$

La media de orden 1 ($\alpha = 1$) es la ponderada simple o la media aritmética no ponderada de P_1, P_2 y P_3. Así

$$P(1) = \frac{w_1 P_1 + w_2 P_2 + w_3 P_3}{w_1 + w_2 + w_3}$$
$$= \frac{1}{3}\left(P_1 + P_2 + P_3\right) \qquad \text{en que } w_i = 1 \text{ para todo } i.$$

¿Puede interpretarse el índice de pobreza humana $P(\alpha)$ como un recuento o como incidencia de pobreza? Mientras P_1, P_2 y P_3 son el recuento o incidencia de pobreza en cada una de las tres dimensiones separadas, $P(\alpha)$ no puede considerarse en general como el cociente de recuento con respecto a una línea de pobreza (hiperplana) trazada en el espacio producto de las tres variables. En su lugar, $P(\alpha)$ es un promedio, aunque de orden á, de los tres subíndices P_1, P_2 y P_3. Si la incidencia de pobreza fuera la misma en todas las dimensiones, entonces claramente $P(\alpha)$ sería igual a este número común, por cuanto

$$\left[\frac{w_1 P(\alpha)^\alpha + w_2 P(\alpha)^\alpha + w_3 P(\alpha)^\alpha}{w_1 + w_2 + w_3} \right]^{1/\alpha} = P(\alpha) = \left(\frac{w_1 P_1^\alpha + w_2 P_2^\alpha + w_3 P_3^\alpha}{w_1 + w_2 + w_3} \right)^{1/\alpha}.$$

Esta observación nos permite interpretar $P(\alpha)$ como el grado de pobreza general que es el equivalente a tener un cociente de recuento de $P(\alpha)$% en todas las dimensiones.

La primera propiedad de $P(\alpha)$ que determinamos es fundamental para comprenderla como una media de P_1, P_2 y P_3. Esta propiedad es que $P(\alpha)$ siempre se sitúa entre los menores y mayores valores de P_i, porque $i = 1, 2, 3$.

PROPOSICION 1.

$$\min\{P_1, P_2, P_3\} \le P(\alpha) \le \max\{P_1, P_2, P_3\}.$$

PRUEBA. Por definición de $P(\alpha)$, tenemos

$$(3) \quad P(\alpha)^\alpha = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3} P_1^\alpha + \frac{w_2}{w_1 + w_2 + w_3} P_2^\alpha + \frac{w_3}{w_1 + w_2 + w_3} P_3^\alpha.$$

Pero por cada $i = 1, 2, 3$,

$$\min\{P_1, P_2, P_3\} \le P_i \le \max\{P_1, P_2, P_3\}.$$

Por lo tanto, por cuanto $\alpha > 0$,

$$\left[\min\{P_1, P_2, P_3\}\right]^\alpha \le P_i^\alpha \le \left[\max\{P_1, P_2, P_3\}\right]^\alpha.$$

Usando la desigualdad del lado derecho para cada $P_i^á$ en la ecuación 3 da

$$P(\alpha)^\alpha \le \frac{w_1 + w_2 + w_3}{w_1 + w_2 + w_3} \left[\max\{P_1, P_2, P_3\}\right]^\alpha$$
$$= \left[\max\{P_1, P_2, P_3\}\right]^\alpha.$$

Asimismo

$$P(\alpha)^\alpha \ge \left[\min\{P_1, P_2, P_3\}\right]^\alpha.$$

Por tanto

$$\left[\min\{P_1, P_2, P_3\}\right]^\alpha \le P(\alpha)^\alpha \le \left[\max\{P_1, P_2, P_3\}\right]^\alpha.$$

Por cuanto $\alpha > 0$, se desprende que

$$\min\{P_1, P_2, P_3\} \le P(\alpha) \le \max\{P_1, P_2, P_3\}. \qquad \square$$

La media generalizada $P(\alpha)$ se construye por los valores de α 1. Como se muestra, su valor limitante cuando α - 1 es simplemente la media aritmética de P_1, P_2 y P_3. En la proposición 7 mostramos que mientras mayor sea α, mayor será P(α). A los efectos de la exposición, es conveniente mostrar en esta etapa que, a medida que á tiende al infinito, el valor limitante de $P(\alpha)$ es max $\{P_1, P_2, P_3\}$.

PROPOSICION 2. A medida que α ,

$$P(\alpha) \to \max\{P_1, P_2, P_3\}.$$

PRUEBA. Sea P_k el mayor valor — o en el caso de empates, uno de los mayores valores — de P_i, por cuanto $i = 1, 2, 3$. De esta manera

$$P_k = \max\{P_1, P_2, P_3\}.$$

Entonces, de la proposición 1, para todo $\alpha > 0$, tenemos

$$(4) \qquad P(\alpha) \le P_k = \max\{P_1, P_2, P_3\}.$$

Ahora

$$P(\alpha)^\alpha = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3} P_1^\alpha + \frac{w_2}{w_1 + w_2 + w_3} P_2^\alpha + \frac{w_3}{w_1 + w_2 + w_3} P_3^\alpha$$
$$\ge \frac{w_k}{w_1 + w_2 + w_3} P_k^\alpha \qquad \text{por cuanto } P_k \text{ es uno de } P_1, P_2 \text{ o } P_3.$$

La nota técnica 1 proviene del documento de antecedentes del *Informe sobre Desarrollo Humano 1997* preparado por Sudhir Anand y Amartya K. Sen, «Concepts of Human Development and Poverty: A Multidimensional Perspective».

En consecuencia, por cuanto $\alpha > 0$,

$$P(\alpha) \geq \left(\frac{w_k}{w_1 + w_2 + w_3}\right)^{1/\alpha} P_k .$$

$$\text{Si } \alpha \to \infty, \quad \left(\frac{w_k}{w_1 + w_2 + w_3}\right)^{1/\alpha} \to 1,$$

manera que $\lim_{\alpha \to \infty} P(\alpha) \geq P_k$.

Pero de la ecuación 4 tenemos también

$$\lim_{\alpha \to \infty} P(\alpha) \leq P_k .$$

De ahí que

$$\lim_{\alpha \to \infty} P(\alpha) = P_k = \max\{P_1, P_2, P_3\}. \quad \square$$

La propiedad siguiente de $P(\alpha)$ que demostramos es que el índice es homogéneo de grado 1 en los subíndices P_1, P_2 o P_3. En otras palabras, si la incidencia de pobreza en cada dimensión se reduce a la mitad (multiplicada por $\lambda > 0$), el mayor del índice agregado $P(\alpha)$ se reducirá a la mitad (cambiado a λ multiplicado por $P(\alpha)$).

PROPOSICION 3. $P(\alpha)$ es homogénea de grado 1 en $(P_1, P_2, P3)$.

PRUEBA. Sea $\lambda > 0$ un número escalar, y sea $P(\alpha)$ el valor del índice de pobreza humana correspondiente a (P_1, P_2, P_3).
Entonces

$$P(\alpha) = \left(\frac{w_1 P_1^\alpha + w_2 P_2^\alpha + w_3 P_3^\alpha}{w_1 + w_2 + w_3}\right)^{1/\alpha} .$$

El valor del índice de pobreza humana correspondiente a $(\lambda P_1, \lambda P_2, \lambda P_3)$ es dado entonces por

$$\left[\frac{w_1(\lambda P_1)^\alpha + w_2(\lambda P_2)^\alpha + w_3(\lambda P_3)^\alpha}{w_1 + w_2 + w_3}\right]^{1/\alpha} = \left[\frac{\lambda^\alpha(w_1 P_1^\alpha + w_2 P_2^\alpha + w_3 P_3^\alpha)}{w_1 + w_2 + w_3}\right]^{1/\alpha}$$
$$= \lambda P(\alpha). \quad \square$$

La propiedad siguiente de $P(\alpha)$ que derivamos es que $P(\alpha)$ aumenta en forma monotónica en cada P_i, para $i = 1, 2, 3$.

PROPOSICION 4. Para cada i - 1, 2, 3,

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_i} > 0.$$

PRUEBA. De la definición de la media generalizada $P(\alpha)$ tenemos

$$(w_1 + w_2 + w_3)\, P(\alpha)^\alpha = w_1 P_1^\alpha + w_2 P_2^\alpha + w_3 P_3^\alpha .$$

Diferenciando parcialmente con respecto a P_i,

$$(w_1 + w_2 + w_3)\, \alpha P(\alpha)^{\alpha-1} \frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_i} = w_i \alpha P_i^{\alpha-1} .$$

Por lo tanto

$$(5) \qquad \frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_i} = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3}\left[\frac{P_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-1}$$
$$> 0 \quad \text{because } w_i > 0. \quad \square$$

En el caso de ponderaciones de unidad (w_i - 1, para $i = 1, 2, 3$) se reduce a

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_i} = \frac{1}{3}\left[\frac{P_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-1} .$$

Además, para $\alpha = 1$, de manera que $P(1)$ simplemente es la media aritmética ponderada o no ponderada de P_i, tenemos

$$\frac{\partial P(1)}{\partial P_i} = \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3}$$

o

$$\frac{\partial P(1)}{\partial P_i} = \frac{1}{3}.$$

Para un índice agregado de pobreza $P(\alpha)$ compuesto de distintos subíndices de pobreza P_1, P_2 y P_3, parece claramente deseable que $P(\alpha)$ aumente en cada P_i. También es deseable que $P(\alpha)$ aumente a una tasa en aumento en P_i, en otras palabras, que $P(\alpha)$ sea convexo con respecto a P_i. Esto equivale a decir que $P(\alpha)$ disminuya con reducciones en P_i, y a una tasa en disminución. La proposición siguiente demuestra que nuestra función agregadora $P(\alpha)$, para $\alpha > 1$, tiene esta propiedad.

PROPOSICION 5. Por cada $i = 1, 2, 3$,

$$\frac{\partial^2 P(\alpha)}{\partial P_i^2} > 0.$$

PRUEBA.

$$\frac{\partial^2 P(\alpha)}{\partial P_i^2} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_i}\right]$$
$$= \frac{w_i}{w_1 + w_2 + w_3} \frac{\partial}{\partial P_i}\left\{\left[\frac{P_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-1}\right\}$$

de la ecuación 5.

Ahora

$$\frac{\partial}{\partial P_i}\left[\frac{P_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-1} = (\alpha-1)\left[\frac{P_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-2} \frac{\partial}{\partial P_i}\left[\frac{P_i}{P(\alpha)}\right]$$
$$= (\alpha-1)\left[\frac{P_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-2} \left[P(\alpha) - P_i \frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_i}\right] \Big/ P(\alpha)^2$$
$$= (\alpha-1)\frac{P_i^{\alpha-2}}{P(\alpha)^\alpha}\left[P(\alpha) - \frac{P_i w_i P_i^{\alpha-1}}{(w_1 + w_2 + w_3)\, P(\alpha)^{\alpha-1}}\right]$$

sustituyendo $\frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_i}$ de la ecuación 5

$$= \frac{(\alpha-1)P_i^{\alpha-2}}{P(\alpha)^\alpha}\left[\frac{(w_1 + w_2 + w_3)P(\alpha)^\alpha - w_i P_i^\alpha}{(w_1 + w_2 + w_3)P(\alpha)^{\alpha-1}}\right].$$

De ahí que

$$\frac{\partial^2 P(\alpha)}{\partial P_i^2} = \frac{w_i P_i^{\alpha-2}(\alpha-1)}{(w_1+w_2+w_3)^2 P(\alpha)^{2\alpha-1}}\left[(w_1+w_2+w_3)P(\alpha)^\alpha - w_i P_i^\alpha\right]$$
$$>0$$

por cuanto $\alpha > 1$ y

$$(w_1+w_2+w_3)P(\alpha)^\alpha - w_i P_i^\alpha = \sum_{j\neq i} w_j P_j^\alpha > 0. \quad \square$$

La propiedad siguiente que consideramos es el efecto sobre el índice agregado $P(\alpha)$ de aumentar la ponderación w_i en un subíndice de pobreza particular P_i. Esperamos que el aumento de la ponderación en el subíndice mayor, max $\{P_1, P_2, P_3\}$, aumentará $P(\alpha)$, a la vez que al aumentar la ponderación en el subíndice menor, min $\{P_1, P_2, P_3\}$, se reducirá de $P(\alpha)$. Pero ¿cuál sería el efecto de aumentar la ponderación en un P_i mediano? La respuesta depende de la relación entre P_i y $P(\alpha)$.

PROPOSICIÓN 6. Para cualquier i,

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial w_i} \gtreqless 0 \text{ as } P_i \gtreqless P(\alpha).$$

PRUEBA. De la definición de $P(\alpha)$ tenemos

$$(w_1+w_2+w_3)P(\alpha)^\alpha = w_1 P_1^\alpha + w_2 P_2^\alpha + w_3 P_3^\alpha.$$

Diferenciando ambos lados parcialmente con respecto a w_i,

$$(w_1+w_2+w_3)\alpha P(\alpha)^{\alpha-1}\frac{\partial P(\alpha)}{\partial w_i} + P(\alpha)^\alpha = P_i^\alpha.$$

Por lo tanto

$$(w_1+w_2+w_3)\alpha P(\alpha)^{\alpha-1}\frac{\partial P(\alpha)}{\partial w_i} = P_i^\alpha - P(\alpha)^\alpha.$$

De ahí que, por cuanto $\alpha > 0$,

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial w_i} \gtreqless 0 \text{ as } P_i^\alpha \gtreqless P(\alpha)^\alpha,$$

es decir,

$$\text{as } P_i \gtreqless P(\alpha). \quad \square$$

Para $\alpha = 1$ tenemos

$$\frac{\partial P(1)}{\partial w_i} = \frac{1}{w_1+w_2+w_3}\left[P_i - P(1)\right]$$
$$\gtreqless 0 \text{ as } P_i \gtreqless P(1).$$

La propiedad siguiente que consideramos es el efecto que tiene sobre $P(\alpha)$ el aumento del valor de parámetro á para valores determinados del subíndice P_i, para $i = 1, 2, 3$. Muestra que el valor del índice agregado será mayor cuando se forme una media de orden superior de P_1, P_2 y P_3. En particular, una media del orden $\alpha > 1$ dará como resultado un $P(\alpha)$ mayor que $P(1)$, la media aritmética simple de P_1, P_2 y P_3.

PROPOSICION 7. Dados P_1, P_2 y P_3 que no son iguales, si $\alpha > \gamma > 0$, entonces $P(\alpha) > P(\gamma)$..

PRUEBA. Sea $\alpha > \gamma > 0$. Por definición de $P(\alpha)$ y $P(\gamma)$, tenemos

$$P(\alpha)^\alpha = \frac{w_1}{w_1+w_2+w_3}P_1^\alpha + \frac{w_2}{w_1+w_2+w_3}P_2^\alpha + \frac{w_3}{w_1+w_2+w_3}P_3^\alpha$$

y

$$P(\gamma)^\gamma = \frac{w_1}{w_1+w_2+w_3}P_1^\gamma + \frac{w_2}{w_1+w_2+w_3}P_2^\gamma + \frac{w_3}{w_1+w_2+w_3}P_3^\gamma.$$

Aumentando ambos lados de la segunda ecuación a la potencia (α/γ) (> 1 por cuanto $\alpha > \gamma > 0$),

$$\left[P(\gamma)^\gamma\right]^{\alpha/\gamma} = \left(\frac{w_1}{w_1+w_2+w_3}P_1^\gamma + \frac{w_2}{w_1+w_2+w_3}P_2^\gamma + \frac{w_3}{w_1+w_2+w_3}P_3^\gamma\right)^{\alpha/\gamma}.$$

Ahora $f(x) = x^{\alpha/\gamma}$ es una función estrictamente convexa, ya que

$$f'(x) = (\alpha/\gamma)\,x^{(\alpha/\gamma)-1}$$

y

$$f''(x) = (\alpha/\gamma)\left[(\alpha/\gamma)-1\right]x^{(\alpha/\gamma)-2}$$
$$> 0 \text{ por cuanto } (\alpha/\gamma) > 1.$$

De ahí que, aplicando la desigualdad de Jensen a las funciones estrictamente convexas $f(\cdot)$ por cuanto P_1, P_2 y P_3 no son iguales, tenemos la estricta desigualdad

$$f\left(\frac{w_1}{w_1+w_2+w_3}P_1^\gamma + \frac{w_2}{w_1+w_2+w_3}P_2^\gamma + \frac{w_3}{w_1+w_2+w_3}P_3^\gamma\right)$$
$$< \frac{w_1}{w_1+w_2+w_3}f(P_1^\gamma) + \frac{w_2}{w_1+w_2+w_3}f(P_2^\gamma) + \frac{w_3}{w_1+w_2+w_3}f(P_3^\gamma).$$

Usando la función estrictamente convexa $f(x) = x^{\alpha/\gamma}$ da

$$\left[P(\gamma)^\gamma\right]^{\alpha/\gamma} < \frac{w_1}{w_1+w_2+w_3}P_1^\alpha + \frac{w_2}{w_1+w_2+w_3}P_2^\alpha + \frac{w_3}{w_1+w_2+w_3}P_3^\alpha,$$

es decir,

$$P(\gamma)^\alpha < P(\alpha)^\alpha.$$

Por cuanto $\alpha > 0$, se desprende que

$$P(\gamma) < P(\alpha). \quad \square$$

Si $\gamma = 1$ y $\alpha > 1$, tenemos el corolario

$$P(\alpha) > P(1) = \frac{w_1P_1 + w_2P_2 + w_3P_3}{w_1+w_2+w_3},$$

La media aritmética ponderada simple de P_1, P_2 and P_3.

A continuación investigamos la «descomponibilidad» del índice de pobreza humana entre grupos dentro de un país. Supongamos que la población de un país se divide en grupos mutuamente excluyentes y exhaustivos m. Los grupos pueden definirse en términos de estratos (urbano, rural), región (por estado, provincia o distrito) o género (masculino, femenino). Sea n el tamaño del grupo de población j, para $j = 1, 2, ..., m$ y sea n el tamaño de la población total del país. Entonces

$$n = \sum_{j=1}^{m} n_j.$$

Sean P_{1j}, P_{2j} y P_{3j} los valores de los tres subíndices de pobreza P_1, P_2 y P_3 para el grupo j, en que $j = 1, 2, ..., m$. Finalmente, $Pj(\alpha)$ denota la media de orden α de P_{1j}, P_{2j} y P_{3j} para el grupo j. Por definición tenemos

$$P_j(\alpha) = \left(\frac{w_1 P_{1j}^{\alpha} + w_2 P_{2j}^{\alpha} + w_3 P_{3j}^{\alpha}}{w_1 + w_2 + w_3} \right)^{1/\alpha}, \text{ for } j = 1, 2, \ldots, m.$$

¿Cuál es la relación entre $P(\alpha)$ y el $P_{1j}(\alpha)$ para $j = 1, 2, ..., m$? La descomponibili-dad estricta del índice $P(\alpha)$ requeriría que $P(\alpha)$ fuera una media ponderada por la población del $P_j(\alpha)$, siendo las ponderaciones de población n_j/n. Pero la descomponibilidad estricta no se da en general.

La relación entre los valores de un subíndice determinado para diferentes grupos (por ejemplo, P_{1j}, para $j = 1, 2, ..., m$) y el valor general del subíndice (por ejemplo, P_1), es bastante directo. Como los índices son simples recuentos de pobreza, tenemos

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_{1j} = P_1,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_{2j} = P_2,$$

$$\text{y} \quad \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_{3j} = P_3.$$

Pero cuando los promedios á de P_{1j} y P_{2j} y P_{3j} se forman para cada j para dar $P_j(\alpha)$, el promedio ponderado por la población de $P_j(\alpha)$ excede de $P(\alpha)$.

PROPOSICION 8. Para $\alpha \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_j(\alpha) \geq P(\alpha).$$

PRUEBA. Para cada $j = 1, 2, ..., m$, tenemos

$$\frac{n_j}{n} P_j(\alpha) = \left[\frac{w_1 \left(\frac{n_j}{n} P_{1j} \right)^{\alpha} + w_2 \left(\frac{n_j}{n} P_{2j} \right)^{\alpha} + w_3 \left(\frac{n_j}{n} P_{3j} \right)^{\alpha}}{w_1 + w_2 + w_3} \right]^{1/\alpha}.$$

Aplicando la desigualdad de Minkowski (Hardy, Litlewood y Pólya 1992, pág. 30) a $(n_j/n)P_{1j}$ $(n_j/n)P_{2j}$ $(n_j/n)P_{3j}$ para $j = 1,2,..., m$ da

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\frac{w_1 \left(\frac{n_j}{n} P_{1j} \right)^{\alpha} + w_2 \left(\frac{n_j}{n} P_{2j} \right)^{\alpha} + w_3 \left(\frac{n_j}{n} P_{3j} \right)^{\alpha}}{w_1 + w_2 + w_3} \right]^{1/\alpha}$$

$$\geq \left[\frac{w_1 \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_{1j} \right)^{\alpha} + w_2 \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_{2j} \right)^{\alpha} + w_3 \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_{3j} \right)^{\alpha}}{w_1 + w_2 + w_3} \right]^{1/\alpha}.$$

De ahí que

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_j(\alpha) \geq \left(\frac{w_1 P_1^{\alpha} + w_2 P_2^{\alpha} + w_3 P_3^{\alpha}}{w_1 + w_2 + w_3} \right)^{1/\alpha}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{n} P_j(\alpha) \geq P(\alpha). \quad \square$$

La desigualdad débil en la proposición 8 será una desigualdad estricta a menos que o $\alpha = 1$ o (P_{1j} y P_{2j} y P_{3j}) y (P_{1k} y P_{2k} y P_{3k}) sean proporcionales para toda j y k.

Un ejemplo simple con no proporcionalidad de los subíndices de pobreza de grupo indica por qué la descomponibilidad (la igualdad en la proposición 8) no se da para $\alpha > 1$. Supóngase que la población se divide en dos grupos mutuamente excluyentes y exhaustivos $j = 1, 2$ de igual tamaño ($n_1/n = n_2/n = {}^1/_2$), con los siguientes valores de subíndices de pobreza:

$$(P_{11}, P_{21}, P_{31}) = (0.25, 0.5, 0.75),$$
$$\text{y } (P_{12}, P_{22}, P_{32}) = (0.75, 0.5, 0.25).$$

De ahí que

$$(P_1, P_2, P_3) = (0.5, 0.5, 0.5),$$

y obviamente $P(\alpha) = 0,5$.

Ahora para el grupo 1

$$P_1(\alpha) = [({}^1/_3)(0.25)^{\alpha} + ({}^1/_3)(0.5)^{\alpha} + ({}^1/_3)(0.75)^{\alpha}]^{1/\alpha}$$
$$> 0.5, \quad \text{por la proposición 7 por cuanto } \alpha > 1,$$

y para el grupo 2

$$P_2(\alpha) = [({}^1/_3)(0.75)^{\alpha} + ({}^1/_3)(0.5)^{\alpha} + ({}^1/_3)(0.25)^{\alpha}]^{1/\alpha}$$
$$> 0.5, \quad \text{por la proposición 7 por cuanto } \alpha > 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}({}^1/_2)P_1(\alpha) + ({}^1/_2)P_2(\alpha) &> ({}^1/_2)(0.5) + ({}^1/_2)(0.5) \\ &= 0.5 \\ &= P(\alpha).\end{aligned}$$

Tomando las medias aritméticas de grupo de cada subíndice de pobreza se tiende a reducir o a dejar sin cambio la disparidad relativa entre los tres subíndices de pobreza. Como resultado de esta característica el promedio á de la media aritmética de subíndices de grupo es menor que la media aritmética de los promedios á de subíndices de grupo.

Finalmente, para un valor dado de $\alpha (\geq 1)$, examinamos el grado de sustituibilidad entre los subíndices de pobreza P_1, P_2 y P_3 en la medida agregada

$P(\alpha)$. La elasticidad de sustitución entre, digamos, P_1 y P_2 a lo largo de una curva iso-$P(\alpha)$, (con P_3 constante) se define como el cambio porcentual en (P_1/P_2) para una unidad de cambio porcentual en la pendiente de la tangente a lo largo de esta curva (proyectada en el espacio P_1-P_2 al valor dado de P_3). Para el índice $P(\alpha)$ la elasticidad de sustitución es constante a lo largo de cada conjunto de niveles de $P(\alpha)$ y la misma para diferentes conjuntos de niveles. Por la proposición 3, $P(\alpha)$ es homogénea de grado 1 en (P_1, P_2 y P_3), y por lo tanto sus conjuntos de niveles son homotéticos.

PROPOSICION 9. La elasticidad de sustitución ó entre dos subíndices cualesquiera de P(á), es decir, entre dos cualesquiera de P_1, P_2 y P_3, es constante e igual a 1/(á-1).

PRUEBA. Considérese la elasticidad de sustitución entre P_1 y P_2, siendo P_3 constante. La pendiente de la tangente a lo largo de una curva iso-$P(\alpha)$ en el espacio P_1-P_2 está dada por

$$x = \frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_1} \Big/ \frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_2}.$$

Por definición, la elasticidad de sustitución σ entre P_1 y P_2 es

$$\frac{\partial \log(P_1/P_2)}{\partial \log x}.$$

De la ecuación 5 en la proposición 4 tenemos

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_1} \Big/ \frac{\partial P(\alpha)}{\partial P_2} = \frac{w_1}{w_2}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\alpha-1} = x.$$

Por tanto

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/(\alpha-1)} x^{1/(\alpha-1)}$$

y

$$\log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\log\left(\frac{w_2}{w_1}\right) + \frac{1}{\alpha-1}\log x.$$

De ahí que la elasticidad de sustitución

$$\sigma = \frac{\partial \log(P_1/P_2)}{\partial \log x} = \frac{1}{\alpha-1}. \quad \square$$

De esta manera, si $\alpha = 1$, hay una sustituibilidad infinita, o perfecta, entre P_1 y P_2. Y si $\alpha \to \infty$, no hay sustituibilidad entre P_1 y P_2. A medida que α aumenta de 1, la elasticidad de sustitución disminuye monotónicamente de ∞ a 0.

Si escogemos $\alpha = 1$ (el caso de sustituibilidad perfecta), el índice agregado $P(\alpha)$ es la media aritmética simple de los tres subíndices P_1, P_2, P_3. A medida que á tiende al , la sustituibilidad se transforma en cero, y el índice agregado tiende al máximo de los tres subíndices, max $\{P_1, P_2, P_3\}$. En general, la elasticidad de sustitución entre dos cualesquiera de los subíndices, siendo el otro constante, es $\sigma = 1/(\alpha-1)$.

Con $\alpha = 1$ y la sustituibilidad infinita, el efecto que tiene sobre $P(\alpha)$ un aumento (o disminución) de unidad de cualquier subíndice es el mismo, independientemente del nivel de privación en las diferentes dimensiones. Esto contradice el supuesto habitual de que, a medida que aumenta el grado de privación en cualquier dimensión (dados los otros), la ponderación de nuevas adiciones a la privación en esa dimensión debería también aumentar. Para esto necesitamos $\alpha > 1$. El valor de á influye también, en medida correspondiente, en la ponderación relativa que se debe dar a la privación en las diferentes dimensiones. Considérese, por ejemplo, $P_1 = 60\%$ y $P_2 = 30\%$ (y asignamos a $P_3 = 45\%$, por ejemplo). En este caso, para cualquier á el efecto relativo de un aumento de unidad en P_1 en comparación con un aumento de unidad en P_2, en general dado por $(P_1/P_2)^{\alpha-1}$, igual a $2^{\alpha-1}$. Con $\alpha = 1$, el efecto relativo es dado por 1. Como se observó anteriormente, a medida que á tiende al infinito, P_1 pasa a ser la única determinante de $P(\alpha)$, de manera que su efecto es infinitamente mayor que el de un aumento de unidad de P_2, que, en este caso, no surte efecto alguno.

El efecto relativo aumenta a medida que á aumenta por encima de 1. Con $\alpha = 3$, el efecto relativo es 4, lo que da a la dimensión de la privación doblemente mayor (P_1) mucho mayor ponderación. El efecto relativo aumenta muy rápidamente al aumentar α, como es claro en la fórmula. Para $\alpha = 5$, el efecto relativo de un aumento de unidad en P_1 llega a ser 16 veces el de un aumento de unidad en P_2.

Para calcular el índice de pobreza humana se ha escogido $\alpha = 3$. Esto da una elasticidad de sustitución de y da mayor ponderación a las dimensiones en que la privación es mayor. Pero no tiene el extremismo de sustituibilidad cero (dado por α que tiende al infinito), ni los valores muy altos de efecto relativo que se generan a medida que se aumenta α (aumentando el efecto relativo, en el caso anteriormente examinado, de 4 a 16 a medida que α pasa de 3 a 5). Hay una arbitrariedad ineludible en la selección de α. La manera correcta de enfrentar esta cuestión es explicar claramente lo que se está suponiendo, como se ha intentado aquí, de manera de hacer posible la crítica pública de este supuesto.

Como cuestión de continuidad intelectual, cabe mencionar que el valor de $\alpha = 3$ corresponde exactamente a la ponderación usada para calcular el índice de desarrollo relativo al géneral (IDG).

Nota técnica 2. Cálculo de los índices

El índice de desarrollo humano

El IDH se basa en tres indicadores: longevidad (medida en función de la esperanza de vida al nacer); nivel educacional (medido en función de una combinación de alfabetización de adultos (ponderación, dos tercios) y tasas de matriculación combinada primaria, secundaria y terciaria (ponderación, un tercio)); y nivel de vida, medido por el PIB per cápita real (PPA en dólares).

Para el cálculo del índice se han establecido valores mínimos y máximos fijos respecto de cada uno de esos indicadores:

- Esperanza de vida al nacer: 25 años y 85 años
- Alfabetización de adultos: 0% y 100%
- Tasa bruta de matriculación combinada: 0% y 100%
- PIB real per cápita (PPA en dólares): 100 dólares PPA y 40.000 dólares PPA

Para cualquier componente del IDH, es posible computar índices individuales aplicando la fórmula general:

$$\text{Índice} = \frac{\text{Valor } x_i \text{ efectivo - } x_i \text{ mínimo}}{\text{Valor } x_i \text{ máximo} - \text{valor } x_i \text{ mínimo}}.$$

Si, por ejemplo, la esperanza de vida al nacer en un país es de 65 años, el índice de esperanza de vida para ese país sería:

$$\frac{65-25}{85-25} = \frac{40}{60} = 0.667.$$

El cálculo del índice de ingreso es algo más complejo. El ingreso medio mundial de 1994, de 5.835 dólares PPA, se adopta como límite (y*) y cualquier ingreso superior a este límite se descuenta utilizando la siguiente fórmula de la utilidad del ingreso:

$$\begin{aligned} W(y) &= y^* \text{ for } 0 < y < y^* \\ &= y^* + 2[(y - y^*)^{1/2}] \text{ for } y^* \leq y \leq 2y^* \\ &= y^* + 2(y^{*1/2}) + 3[(y - 2y^*)^{1/3}] \text{ for } 2y^* \leq y \leq 3y^* \\ y &= y^* + 2(y^{*1/2}) + 3[(y-2y^*)^{1/3}] + n\{[1-(n-1)y^*]\}^{1/n} \\ &\qquad \text{por } (n-1)y^* \leq y \leq ny^*. \end{aligned}$$

Para calcular el valor descontado del ingreso máximo de 40.000 dólares PPA, se utiliza la siguiente variante de la fórmula de Atkinson:

$$\begin{aligned} W(y) = y^* &+ 2(y^{*1/2}) + 3(y^{*1/3}) + 4(y^{*1/4}) + 5(y^{*1/5}) \\ &+ 6(y^{*1/6}) + 7(y^{*1/7}) + 8[(40{,}000 - 7y^*)^{1/8}]. \end{aligned}$$

Esto se debe a que 40.000 dólares PPA se ubican entre 7y* y 8y*. Con la fórmula indicada supra el valor descontado del ingreso máximo de 40.000 dólares PPA es 6.154 dólares PPA.

El cálculo del IDH se ilustra con dos ejemplos: Grecia, país industrializado y el Gabón, país en desarrollo

País	Esperanza de vida (años)	Alfabetización de adultos (%)	Tasa de matriculación combinada (%)	PIB real per cápita (PPP en dólares)
Grecia	77,8	96,7	82	11.265
Gabón	54,1	62,6	60	3.641

Índice de esperanza de vida

$$\text{Grecia} = \frac{77{,}8-25}{85-25} = \frac{52{,}8}{60} = 0{,}880$$

$$\text{Gabón} = \frac{54{,}1-25}{85-25} = \frac{29{,}1}{60} = 0{,}485$$

Índice de alfabetización de adultos

$$\text{Grecia} = \frac{96{,}7-0}{100-0} = \frac{96{,}7}{100} = 0{,}967$$

$$\text{Gabón} = \frac{62{,}6-0}{100-0} = \frac{62{,}6}{100} = 0{,}626$$

Índice de tasa de matriculación combinada primaria, secundaria y terciaria

$$\text{Grecia} = \frac{82-0}{100-0} = 0{,}820$$

$$\text{Gabón} = \frac{60-0}{100-0} = 0{,}600$$

Índice de nivel educacional

Grecia = [2(0.967) + 1(0,820)] ÷ 3 = 0,918

Gabón = [2(0.625) + 1(0,600)] ÷ 3 = 0,617

Índice de PIB real per cápita ajustado (PPA en dólares)

El PIB real per cápita de Grecia, 11.265 dólares PPA, está por encima — pero es menos del doble del límite. Por consiguiente, el PIB real per cápita ajustado para Grecia sería 5.982 dólares PPA, debido a que 5.982 = [5.835 + 2(11.265 - 5.835)

El PIB real per cápita del Gabón, de 3.641 dólares PPA, es inferior al límite, de modo que no necesita ajuste.

De esta manera, el índice del PIB real per cápita ajustado (PPA en dólares) para Grecia y el Gabón sería:

$$\text{Grecia} = \frac{5{,}982-100}{6{,}154-100} = \frac{5{,}882}{6{,}054} = 0.972$$

$$\text{Gabón} = \frac{3{,}641-100}{6{,}154-100} = \frac{3{,}541}{6{,}054} = 0.584$$

Índice de desarrollo humano

El IDH es un promedio simple del índice de esperanza de vida, el índice de nivel educacional y el índice del PIB real per cápita ajustado (PPA en dólares). Se calcula dividiendo por 3 la suma de los tres índices.

País	Índice de esperanza de vida	Índice de nivel educacional	Índice de PIB real per cápita ajustado (PPA en dólares)	IDH
Grecia	0,880	0,918	0,972	0,923
Gabón	0,485	0,617	0,584	0,562

El índice de desarrollo relativo al género y el índice de potenciación de género

Para hacer comparaciones entre los países, el IDG y el IPG están limitados a los datos ampliamente disponibles en series de datos a escala internacional. En el Informe de este año hemos procurado utilizar los datos más recientes, más fidedignos y con mayor coherencia interna. Recopilar datos desagregados por género que sean más amplios y fidedignos es un reto que debe enfrentar sin ambages la comunidad internacional. Seguiremos publicando los resultados relativos al IDG y al IPG — sobre la base de las mejores estimaciones disponibles — en la esperanza de contribuir así al aumento de la demanda de esos datos.

El índice de desarrollo relativo al género

En el cálculo del IDG se utilizan las mismas variables que para el cálculo del IDH. La diferencia es que al calcular el IDG se introduce un ajuste del adelanto medio de cada país en materia de esperanza de vida, nivel educacional e ingreso, en función del grado de disparidad en el adelanto de mujeres y hombres (véase una explicación pormenorizada de la metodología del IDG en la nota técnica 1 del Informe sobre Desarrollo Humano 1995). Para este ajuste en el que se consideran las cuestiones de género, utilizamos una fórmula de ponderación que expresa una aversión moderada a la desigualdad y escogemos para el parámetro de ponderación, â, el valor 2. Esto representa la media armónica de los valores masculinos y femeninos.

En el cálculo del IDG también se ajustan los valores máximo y mínimo de la esperanza de vida para reflejar el hecho de que las mujeres viven en general más que los hombres. El valor máximo para la esperanza de vida de la mujer es 87,5 años y el valor mínimo, 27,5 años; para los hombres los valores correlativos son 82,5 años y 22,5 años.

El cálculo del índice de ingreso es bastante complejo. Para determinar la participación femenina y masculina en el ingreso proveniente del trabajo utilizamos el cociente entre el salario femenino medio y el salario masculino medio, y la participación porcentual femenina y masculina en la población económicamente activa de 15 y más años de edad. Cuando no se dispone de datos sobre la proporción entre el salario femenino medio y el salario masculino medio, se utiliza como valor medio el 75%, que es el cociente medio ponderado entre salarios femeninos y masculinos calculado para todos los países para los cuales se dispone de datos. Antes de indizar el ingreso se aplica un coeficiente de descuento al PIB real per cápita de cada país en función de la disparidad entre las proporciones de mujeres y hombres en el ingreso proveniente del trabajo y proporcionalmente a la participación porcentual de mujeres y hombres en la población.

Los índices de esperanza de vida, nivel educacional e ingreso se suman asignándoles igual ponderación para obtener finalmente el valor del IDG.

Ilustración de la metodología de cálculo del IDG

Hemos escogido a Noruega para ilustrar la metodología de cálculo del índice de desarrollo relativo al género. El parámetro de aversión a la desigualdad, Ó, es igual a 2 (cualesquiera discrepancias en los resultados se deben al redondeo de las cifras).

Participación porcentual en el total de la población
Mujeres 51
Hombre 49
Esperanza de vida al nacer (años)
Mujeres 80.4
Hombre 74.6
Tasa de alfabetización de adultos (%)
Mujeres 99
Hombre 99
Tasa bruta de matriculación primaria, secundaria y terciaria combinadas (%)
Mujeres 93
Hombre 92

PRIMER PASO
Cálculo del índice de esperanza de vida igualmente distribuido

Índice de esperanza de vida
Mujeres (80,4 – 27,5)/60 = 0,882
Hombre (74,6 – 22,5)/60 = 0,868

El índice de esperanza de vida igualmente distribuido
{[(participación de la población femenina x (índice de esperanza de vida femenina)$^{-1}$] + [participación de la población masculina x (índice de esperanza de vida masculina)$^{-1}$]}$^{-1}$
$[0,51(0,882)^{-1} + 0,49(0,868)^{-1}]^{-1} = 0,875$

SEGUNDO PASO
Cálculo del índice de nivel educacional igualmente distribuido

Índice de alfabetización de adultos
Mujeres (99 – 0)/100 = 0,990
Hombres (99 – 0)/100 = 0,990
Índice de matriculación bruta combinada
Mujeres (93 – 0)/100 = 0,930
Hombres (92 – 0)/100 = 0,920
Índice de nivel educacional
2/3(índice de alfabetización de adultos) + 1/3(índice de matriculación bruta combinada)
Mujeres 2/3(0,990) + 1/3(0,930) = 0,970
Hombres 2/3(0,990) + 1/3(0,920) = 0,967

El índice de nivel educacional igualmente distribuido
{[participación de la población femenina x (índice de nivel educacional)$^{-1}$] + [participación de la población masculina x (índice de nivel educacional)$^{-1}$]}$^{-1}$
$[0,51(0,970)^{-1} + 0,49(0,967)^{-1}]^{-1} = 0,968$

TERCER PASO
Cálculo del índice de ingreso igualmente distribuido

Participación porcentual en la población económicamente activa
Mujeres 45,5
Hombres 54,5

Cociente entre el salario no agrícola femenino y el salario no agrícola masculino: 0,870

PIB real per cápita ajustado: PPA 6.073 dólares (véase la sección sobre el IDH *supra*)

A. Cálculo de la participación proporcional en el ingreso

Salario medio (W) = (participación femenina en la población económicamente activa x salario femenino) + (población económicamente activa masculina x 1)
(0,455 x 0,870) + (0,545 x 1) = 0,941

Cociente del salario femenino y el salario medio (W)
0,870/0,941 = 0,925
Cociente del salario masculino y el salario medio (W)
1/0,941 = 1,063

Participación en el ingreso proveniente del trabajo
Nota: [(salario femenino/salario medio) x participación femenina en la población económicamente activa] + [(salario masculino/salario medio) x participación masculina en la población económicamente activa] = 1.
Mujeres
Salario femenino/población económicamente activa femenina
0,9247 x 0,4553 = 0,4210
Hombres
Salario masculino/población económicamente activa masculina
1,063 x 0,545 = 0,579

Participación proporcional de mujeres y hombres en el ingreso
Mujeres
Participación femenina en el ingreso proveniente del trabajo/porcentaje de mujeres en la población
0,421/0,505 = 0,834
Hombres
Participación masculina en el ingreso proveniente del trabajo/porcentaje de hombres en la población
0,579/0,495 = 1,169

B. Cálculo del índice de ingreso igualmente distribuido

Se aplica el parámetro de ponderación ($\in = 2$).
{[Porcentaje de mujeres en la población x (participación femenina proporcional en el ingreso)$^{-1}$] + [porcentaje de hombres en la población x (participación proporcional masculina en el ingreso)$^{-1}$]}$^{-1}$

$[0{,}505\ (0{,}834)^{-1} + 0{,}495\ (1{,}169)^{-1} = 0{,}972$

$0{,}972 \times 6.073 = 5.903$

$(5.903 - 100)/(6.154 - 100) = 0{,}959$

CUARTO PASO
Cálculo del índice de desarrollo relativo al género (IDG)

$1/3(0{,}875 + 0{,}968 + 0{,}959) = 0{,}934$

El índice de potenciación de género
En el índice de potenciación de género (IPG) se utilizan variables preparadas explícitamente para la medición de la potenciación relativa de hombres y mujeres en esferas de actividad política y económica.

Las dos primeras variables se escogen para reflejar la participación económica y la facultad de adopción de decisiones. Abarcan la participación porcentual de mujeres y hombres en puestos administrativos y ejecutivos y la participación porcentual en empleos profesionales y técnicos. Estas categorías ocupacionales son de definición amplia y poco circunscrita. Dado que la población pertinente a cada una de ellas es diferente, calculamos por separado los índices para cada una y seguidamente los sumamos. La tercera variable, la participación porcentual de mujeres y hombres en el número de escaños parlamentarios, se escoge a fin de que refleje la participación política y la facultad de adoptar decisiones.

Para esas tres variables hemos utilizado la metodología del promedio ponderado de población ($1 - \in$) a fin de obtener un «porcentaje equivalente igualmente distribuido» (EDEP) para hombres y mujeres, considerados en su conjunto. Se indiza cada variable, dividiendo el EDEP por 50%.

Se utiliza una variable de ingreso a fin de reflejar el grado de control sobre los recursos económicos. Se calcula de la misma manera que el IDG, salvo que se utiliza el PIB real per cápita no ajustado, en lugar del PIB real per cápita ajustado. Por consiguiente, el valor máximo del ingreso es 40.000 dólares PPA y el mínimo, 100 dólares PPA.

A fin de obtener el valor final del IPG, se suman con igual ponderación los tres índices: de participación y adopción de decisiones en cuestiones económicas; de participación y adopción de decisiones en cuestiones políticas, y de grado de control sobre los recursos económicos.

Ilustración de la metodología de cálculo del IPG
Para ilustrar la metodología de cálculo del IPG se ha escogido el caso del Camerún. El parámetro de aversión a la desigualdad, $\in$, tiene valor 2 (cualesquiera discrepancias en los resultados se deben al redondeo de las cifras)

PRIMER PASO
Cálculos de los índices de representación parlamentaria y de puestos administrativos, ejecutivos, profesionales y técnicos

Participación porcentual en la representación parlamentaria
Mujeres 12,1
Hombres 87,8
Participación porcentual en los puestos administrativos y ejecutivos
Mujeres 10,1
Hombres 89,9
Participación porcentual en los puestos profesionales y técnicos
Mujeres 24,4
Hombres 75,6
Participación porcentual en el total de la población
Mujeres 50,38
Hombres 49,62

Cálculo del EDEP para la representación parlamentaria
$[0{,}4962(87{,}8)^{-1} + 0{,}5038(12{,}1)^{-1}] = 21{,}3$

Cálculo del EDEP para puestos administrativos y ejecutivos
$[0{,}4962(89{,}9)^{-1} + 0{,}5038(10{,}1)^{-1}]\ 18{,}05$

Cálculo del EDEP para puestos profesionales y técnicos
$[0{,}4962(75{,}6)^{-1} + 0{,}5038(24{,}4)^{-1}] - 36{,}75$

Indización de la representación parlamentaria
$21{,}30/50 = 0{,}426$

Indización de puestos administrativos y ejecutivos
$18{,}05/50 = 0{,}361$

Indización de puestos profesionales y técnicos
$36{,}75/50 = 0{,}735$

Cómputo del índice combinado de puestos administrativos y ejecutivos y puest profesionales y técnicos
$(0{,}361 + 0{,}735)/2 = 0{,}548$

SEGUNDO PASO
Cálculo del índice de participación en el ingreso proveniente del trabajo

Participación porcentual en la población económicamente activa
Mujeres 37,4
Hombres 62,6

Proporción entre el salario no agrícola femenino y el salario no agrícola masculino: 75%

PIB per cápita real no ajustado: 2.120 dólares PPA

Proporción entre el salario femenino y el salario medio (W), y entre el salar masculino y el salario medio (W)::
$W = 0{,}374(0{,}75) + 0{,}626(1) = 0{,}9065$
Cociente entre el salario femenino y el salario medio: $0{,}75/0{,}9065 = 0{,}8274$
Cociente entre el salario masculino y el salario medio: $1/0{,}9065 = 1{,}1031$

Participación en el ingreso proveniente del trabajo
Nota: [(salario femenino/salario medio) x participación femenina en l población económicamente activa] + [(salario masculino/salario medio) participación masculina en la población económicamente activa] = 1.
Mujeres $0{,}8274 \times 0{,}374 = 0{,}3094$
Hombre $1{,}1031 \times 0{,}626 = 0{,}6095$

Participación proporcional masculina y femenina en el ingreso
Mujeres $0{,}3094/0{,}5038 = 0{,}6141$
Hombre $0{,}6905/0{,}4962 = 1{,}3916$

Cálculo del índice de ingreso igualmente distribuido
$[0{,}4962(1{,}3916)^{-1} + 0{,}5038(0{,}6141)^{-1}]^{-1} = 0{,}8496$
$0{,}8496 \times 2.120 = 1.801$
$(1.801 - 100)/(40.000 - 100) = 0{,}0426$

TERCER PASO
Cálculo del IPG
$[1/3(0{,}0426 + 0{,}0548 + 0{,}426)] = 0{,}3389$

El índice de pobreza humana

El IPH se concentra en la privación de tres elementos esenciales de la vida humana que ya se reflejan en el IDH: la longevidad, los conocimientos y un nivel decente de vida. La primera privación se refiere a la supervivencia, la vulnerabilidad ante la muerte a una edad relativamente temprana. La segunda se refiere a los conocimientos, quedar excluido del mundo de la lectura y la comunicación. El tercero se relaciona con un nivel decente de vida en términos del aprovisionamiento económico general.

En la preparación del IPH la privación en materia de longevidad está representada por el porcentaje de personas que se estima que no sobrevivirán hasta la edad de 40 años (P_1), y la privación de conocimientos, por el porcentaje de adultos analfabetos (P_2). La privación en lo que se refiere a un nivel decente de vida en términos del aprovisionamiento económico general está representada por un compuesto (P_3) de tres variables: el porcentaje de personas sin acceso a agua potable (P_{31}), el porcentaje de personas sin acceso a servicios de salud (P_{32}) y el porcentaje de niños menores de cinco años de edad con peso moderadamente y severamente insuficiente (P_{33}).

Se prepara la variable compuesta P tomando un promedio simple de las tres variables P_{31}, P_{32} y P_{33}. De esta manera

$$P_3 = \frac{P_{31} + P_{32} + P_{33}}{3} \; .$$

Siguiendo el análisis del capítulo 1 y la nota técnica 1, la fórmula del IPH es el resultado de

$$\text{IPH} = [(P_1^3 + P_2^3 + P_3^3) - 3]^{1/3}.$$

Como ejemplo, calculamos el IPH para Egipto.

PRIMER PASO
Cálculo de P_3

País	P_1 (%)	P_2 (%)	P_{31} (%)	P_{32} (%)	P_{33} (%)
Egipto	16,6	49,5	21,0	1,0	9,0

$$P_3 = \frac{21 + 1 + 9}{3} = \frac{31}{3} = 10{,}33$$

SEGUNDO PASO
Cálculo del IPH

$$\begin{aligned} \text{IPH} &= [1/3(16{,}6^3 + 49{,}5^3 + 10{,}33^3)]^{1/3} \\ &= [1/3(4.574{,}30 + 121.287{,}38 + 1.102{,}30)]^{1/3} \\ &= [1/3(126.963{,}98)^{1/3} \\ &= (42.321{,}33)^{1/3} \\ &= 34{,}8 \end{aligned}$$

CUADRO 2.1 DE LA NOTA TÉCNICA

Índice de pobreza humana

Clasificación según el IDH		Privación en materia de supervivencia Población que se estima que no sobrevivirá hasta los 40 años (%) 1990[a] (P_1)	Privación en materia de educación y conocimientos Tasa de analfabetismo adulto (%) 1994 (P_2)	Privación en materia de aprovisionamiento económico (P_3) Población sin acceso a agua potable (%) 1990-1996 (P_{31})	Población sin acceso a servicios de salud (%) 1990-1995 (P_{32})	Niños menores de cinco con peso insuficiente (%) 1990-1996 (P_{33})	Total (P_3)	Índice de pobreza humana (IPH) (%)
1	Trinidad y Tabago	5,4[b]	2,1	3	0	7[c]	3	4,1
2	Cuba	6,2[d,e]	4,6	11	0	1[f]	4	5,1
3	Chile	4,6[d,e]	5,0	15[c]	3[c]	1	6	5,4
4	Singapur	3,2[d,e]	9,0	0[c]	0[c]	14[c]	5	6,6
5	Costa Rica	4,1[b]	5,3	4	20[c]	2	9	6,6
6	Colombia	6,3[b]	8,9	15	19	8	14	10,7
7	México	8,3[b]	10,8	17	7	14[c]	13	10,9
8	Jordania	9,2[b]	14,5	2	3[c]	9	5	10,9
9	Panamá	6,2[d,e]	9,5	7	30	7	15	11,2
10	Uruguay	5,4[d,e]	2,9	25[c]	18[c]	7[c]	17	11,7
11	Tailandia	8,9[b]	6,5	11	10[c]	26[c]	16	11,7
12	Jamaica	4,3[b]	15,6	14	10[c]	10	11	12,1
13	Mauricio	6,2[d,e]	17,6	1	0[c]	16	6	12,5
14	Emiratos Árabes Unidos	3,6[b]	21,4	5	1	6[g]	4	14,9
15	Ecuador	9,9[b]	10,4	32	12[c]	17[c]	20	15,2
16	Mongolia	16,0[h,i]	17,8	20	5[c]	12	12	15,7
17	Zimbabwe	18,4[d,j]	15,3	23	15	16	18	17,3
18	China	9,1[d,k]	19,1	33	12	16	20	17,5
19	Filipinas	12,8[d,l]	5,6	14	29	30	24	17,7
20	República Dominicana	10,2[b]	18,5	35	22	10	22	18,3
21	Jamahiriya Árabe Libia	16,2[b]	25,0	3	5	5	4	18,8
22	Sri Lanka	7,9[d,e]	9,9	43	7[c]	38	29	20,7
23	Indonesia	14,8[d,j]	16,8	38	7	35	27	20,8
24	Rep. Árabe Siria	10,3[b]	30,2	15	10	12	12	21,7
25	Honduras	10,8[b]	28,0	13	31	18	21	22,0
26	Bolivia	19,6[d,j]	17,5	34	33	16	28	22,5
27	Irán, Rep. Islámica del	11,7[b]	31,4[m]	10	12	16	13	22,6
28	Perú	13,4[d,j]	11,7	28	56	11	32	22,8
29	Botswana	15,9[b]	31,3	7[c]	11[c]	15[c]	11	22,9
30	Paraguay	9,2[b]	8,1	58	37[c]	4	33	23,2
31	Túnez	10,5[b]	34,8	2	10[c]	9	7	24,4
32	Kenya	22,3[b]	23,0	47	23	23	31	26,1
33	Viet Nam	12,1[b]	7,0	57	10	45	37	26,2
34	Nicaragua	13,6[b]	34,7	47	17[c]	12	25	27,2
35	Lesotho	23,9[b]	29,5	44	20[c]	21	28	27,5
36	El Salvador	11,7[b]	29,1	31	60	11	34	28,0
37	Argelia	10,6[b]	40,6	22	2	13	12	28,6
38	Congo	22,1[b]	26,1	66	17[c]	24[c]	36	29,1
39	Iraq	15,4[b]	43,2	22	7[c]	12	14	30,7
40	Myanmar	25,6[b]	17,3	40	40	43	41	31,2
41	Camerún	25,4[b]	37,9	50	20	14	28	31,4
42	Papua Nueva Guinea	28,6[b]	28,8	72	4[c]	35[c]	37	32,0
43	Ghana	24,9[b]	36,6	35	40[c]	27	34	32,6
44	Egipto	16,6[de]	49,5	21	1	9	10	34,8
45	Zambia	35,1[b]	23,4	73	25[c]	28	42	35,1
46	Guatemala	14,5[d,e]	44,3	36	43	27	35	35,5
47	India	19,4[d,k]	48,8	19	15	53	29	36,7
48	Rwanda	42,1[b]	40,8	34[c]	20	29	28	37,9
49	Togo	28,4[b]	49,6	37	39[c]	24[c]	33	39,3
50	Tanzanía, Rep. U. de	30,6[b]	33,2	62	58	29	50	39,7
51	Lao, Rep. Dem. Pop.	32,7[h,i]	44,2	48	33[c]	44	42	40,1
52	Zaire	30,0[b]	23,6	58	74[c]	34	55	41,2
53	Uganda	39,0[d,n]	38,9	62	51	23[c]	45	41,3
54	Nigeria	33,8[b]	44,4	49	49	36	45	41,6
55	Marruecos	12,3[d,j]	57,9	45	30[c]	9	28	41,7

CUADRO 2.1 DE LA NOTA TÉCNICA

Índice de pobreza humana

Clasificación según el IDH	Privación en materia de supervivencia Población que se estima que no sobrevivirá hasta los 40 años (%) 1990[a] (P_1)	Privación en materia de educación y conocimientos Tasa de analfabetismo adulto (%) 1994 (P_2)	Privación en materia de aprovisionamiento económico (P_3) Población sin acceso a agua potable (%) 1990-1996 (P_{31})	Población sin acceso a servicios de salud (%) 1990-1995 (P_{32})	Niños menores de cinco con peso insuficiente (%) 1990-1996 (P_{33})	Total (P_3)	Índice de pobreza humana (IPH) (%)
56 Rep. Centroafricana	35,4[d,j]	42,8	62	48	27	46	41,7
57 Sudán	25,2[b]	55,2	40	30	34	35	42,2
58 Guinea-Bissau	43,2[h,i]	46,1	41	60	23[c]	41	43,6
59 Namibia	21,1[d,j]	60,0[o]	43	41	26	37	45,1
60 Malawi	38,3[d,j]	44,2	63	65	30	53	45,8
61 Haití	27,1[b]	55,9	72	40	28	47	46,2
62 Bhután	33,2[h,i]	58,9	42	35[c]	38[c]	38	46,3
63 Côte d'Ivoire	23,1[d,n]	60,6	25	70[c]	24	40	46,3
64 Pakistán	22,6[b]	62,9	26	45[c]	38	36	46,8
65 Mauritania	31,7[h,i]	63,1	34[c]	37	23	31	47,1
66 Yemen	25,6[b]	58,9[o]	39	62	39	47	47,6
67 Bangladesh	26,4[b]	62,7	3	55	67	42	48,3
68 Senegal	25,3[d,p]	67,9	48	10	20	26	48,7
69 Burundi	33,8[b]	65,4	41	20	37	33	49,0
70 Madagascar	32,1[d,j]	54,2[q]	71	62	34	56	49,5
71 Guinea	41,3[h,i]	65,2	45	20	26	30	50,0
72 Mozambique	43,8[b]	60,5	37	61[c]	27	42	50,1
73 Camboya	31,9[h,i]	65,0[r]	64	47[c]	40	50	52,5
74 Malí	28,4[d,n]	70,7	55	60	31[c]	49	54,7
75 Etiopía	35,7[b]	65,5	75	54	48	59	56,2
76 Burkina Faso	36,1[b]	81,3	22	10	30	21	58,3
77 Sierra Leona	52,1[b]	69,7	66	62	29	52	59,2
78 Níger	43,2[d]	86,9	46	68[r]	36	50	66,0

a. Los datos se refieren a 1990 o un año próximo a 1990. b. Se obtiene mediante la combinación de dos series de estimaciones de riesgo de mortalidad: estimaciones del UNICEF de la probabilidad de morir antes de los 5 años y estimaciones de la División de Población de las Naciones Unidas de la probabilidad de morir entre las edades de 5 a 40 años (35q5). Las estimaciones se interpolaron usando la familia Coale-Demeny «West» de cuadros de vida modelo. Para todos los países se estima la esperanza de vida al nacer en 1990 como el promedio aritmético de las estimaciones para ese período en Naciones Unidas 1996b, como se explica en Hill 1997. c. Los datos se refieren a un año o período distinto del especificado en el encabezamiento de la columna, difieren de la definición estándar o se refieren sólo a parte de un país. d. Estimaciones del UNICEF de la probabilidad de morir antes de los 5 años más estimaciones independientes (Hill 1997) de la probabilidad de morir entre las edades de 5 y 40 años. e. Basado en el registro de muertes alrededor de 1990. f. Emaciación (moderada o severa). g. Fuente de oficina exterior del UNICEF. h. División de Población de las Naciones Unidas, basada en la esperanza de vida al nacer. i. División de Población de las Naciones Unidas, obtenida mediante el cálculo de la esperanza de vida al nacer estimada en 1990 (obtenida por interpolación lineal entre las estimaciones de 1985-1990 y 1990-1995) y luego calculando los valores implícitos 40qo y 60qo en los cuadros de vida modelo de Coale-Demeny «West». Se usaron cuadros de vida nacional de Keyfitz y Flieger para calcular el cociente entre la esperanza de vida al nacer de 40qo y 60qo alrededor de 1970 y alrededor de 1985; para cada país se estimaron a continuación los cocientes para 1990 por extrapolación lineal. Se trazaron esas cocientes en el tiempo y se encontró que cambiaban de manera semejante en el tiempo en distintos países, lo que arrojó una serie de líneas paralelas. A continuación se utilizaron la estimación del cociente y la estimación de la esperanza de vida al nacer para obtener una estimación del riesgo de morir antes de los 40 años y antes de los 60 años, como se explicó en Hill 1997. j. Basado en estimaciones hermanas directas de la Encuesta Demográfica y de Salud de probabilidad de morir entre las edades de 5 y 50 años, extendidas a las edades de 50 y 60 usando el cuadro de vida modelo Coale-Demeny «West» ajustado a 45q5, como se explica en Hill 1997. k. Banco Mundial 1993. l. Basado en muertes registradas tras el ajuste correspondiente a estimación de conclusión. m. UNESCO 1995. Los datos corresponden a 1995. n. Basado en estimaciones hermanas directas de la Encuesta Demográfica y de Salud de la probabilidad de morir entre las edades de 15 y 50 años, extendidas para abarcar las edades de 5 a 14 años y de 50 a 60 usando un cuadro de vida modelo Coale-Demeny «West» ajustado a 35q15. o. PNUD 1996d. p. Pison y otros 1995. q. Estimación de la Oficina del Informe sobre Desarrollo Humano basada en fuentes nacionales. r. UNICEF 1996b.

Fuente: Columna 1: Hill 1997; columna 2: cálculos basados en datos de UNESCO 1996b; columnas 3 y 4: cálculos basados en datos de UNICEF 1997; columna 5: UNICEF 1997.